作业三　（10月27日课堂上交）

关于康托集（The Cantor Set）的一些基本性质。Enjoy math!

在区间 $[0,1]$ 中，去掉正中间的 $1/3$ 开区间 $(1/3,2/3)$ ，我们得到两个不相交的的闭区间 $[0,1/3]$ 和 $[2/3,1]$ 。对于这两个闭区间，再分别去掉它们正中间的 $1/3$ 开区间，我们得到四个互不相交的闭区间。如此这样一直下去，最终剩下的集合被称为康托集。

用比较数学的语言来讲，用 K_1 代表第一步中去掉的一个“中间 $1/3$ 开区间”，K_2 和 K_3 代表第二步中去掉的两个（为什么是两个？）“中间 $1/3$ 开区间”，K_4，$\cdots$，K_7 代表第三步中去掉的四个（为什么是四个？）“中间 $1/3$ 开区间”，$\cdots$ 。则康托集定义为

$$X=[0,1]-\bigcup_{n=1}^{\infty}K_n。$$

以上为背景。

在下面问题的解答中，可以直接使用如下事实

“如果集合 A_1，A_2，$\cdots$ 是一列非空有限集合并且两两互不相交，则 $|\bigsqcup_{n=1}^{\infty}A_n|=\aleph_0$ 。”

关于上述事实的证明，可能比较直接的方法就是仿照 $|\mathbb{N}|=|\mathbb{N}\times\mathbb{N}|$ 的证明。唯一区别在于对于 $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ ，在坐标系中可以用可数多个水平点集的无交并来表示，其中每个水平点集对应着 $\mathbb{N}$ 。为了证明上述事实，每个水平点集都包含有限个元素（同时至少包含一个元素）。仿

造 $|\mathbb{N}| = |\mathbb{N}\times\mathbb{N}|$ 的证明思路，应该不难证明 $\bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n$ 和 $\mathbb{N}$ 之间存在一一对应。

以下为问题:

a）证明: 康托集 X 非空 。

b）对于上述的开区间 K_i，设 $K_i = (x_i^L, x_i^R)$。证明对于任意 $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$，$x_n^L \in X$ 且 $x_n^R \in X$ 。

c）证明: $|X| \geq \aleph_0$ 。

d）定义集合 Y 为

$$\{(y_1, y_2, \cdots)\colon y_i = \text{L 或者 } y_i = \text{R},\ \forall i \in \mathbb{N}_{\geq 1}\} \text{ 。}$$

定义从康托集 X 到 Y 的映射 f 如下:

对于任意的 $x \in X$，如果在第一步中去掉中间的 $1/3$ 开区间后得到的两个闭区间 $[0, 1/3]$ 和 $[2/3, 1]$ 中，x 位于左边的闭区间 $[0, 1/3]$ 中，则在 $f(x)$ 的第一个位置写下 L（left），如果 x 位于右边的闭区间 $[2/3, 1]$ 中，则在 $f(x)$ 的第一个位置写下 R（right）。在第一步后剩下的包含 x 的那一个闭区间中，第二步会去掉该闭区间的中间 $1/3$ 开区间，并得到两个长度为原来包含 x 的那个闭区间的 $1/3$ 的闭区间。如果 x 在这两个闭区间中左边的那个中，则 $f(x)$ 的第二个位置写下 L，否则写下 R 。依此类推 $\cdots$

按照上面的描述，我们定义了

$$f\colon X \longrightarrow Y,\ x \mapsto f(x) \text{ 。}$$

证明: f 为单射。（提示: 如果康托集中有 $x_1 \neq x_2$，则 $|x_1 - x_2| = \delta > 0$ 。如果 $f(x_1)$ 和 $f(x_2)$ 的第一位相同，则 $|x_1 - x_2| < 1/3$，$\cdots$）

注: 事实上，上面构造的 f 也是满射（证明以后可能会让你们自己完成）。因此我们有 $|X| = |Y|$ 。我们在课上已经证明了 Y 是不可数集合，故而康托集 X 是不可数集。

e）给定以下事实:

i）考虑 $\mathbb{R}$ 中的任意子集 A ， A 上如果可以定义长度（这里记为 A 是“有长度”的），则记其长度为$L(A)$ 。

注: 并不是所有的子集上都可以定义长度/体积的（比如考虑课上提到过的Banach-Tarski悖论，如果球的所有子集都是有体积的，则会出现类似$1 = 1 + 1$的矛盾）

ii）如果 A 上“有长度”，则 $L(A) \geq 0$ 。

ii）对于任意 $a < b$ ， $a, b \in \mathbb{R}$， (a, b)， $[a, b)$， $(a, b]$ 和 $[a, b]$ 都是“有长度”的，并且其长度都是 $b - a$ 。

iii）对于 $\mathbb{R}$ 中的子集 A 和 B，如果 A 和 B 都是“有长度”的并且 $A \subset B$ ，则 $B - A$ 也是“有长度”的，并且 $L(B - A) = L(B) - L(A)$ 。

iv）对于 $\mathbb{R}$ 中的“有长度”的一列子集 A_1，A_2，$\cdots$，如果它们两两不相交，则它们的无交并也是“有长度”的，并且

$$L(\bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} L(A_n),$$

其中 $\sum_{n=1}^{\infty} L(A_n)$ 定义为 $\lim_{N\to\infty} S_N$ ，而 S_N 定义为 $\sum_{n=1}^{N} L(A_n)$ 。

注: 上述性质也被称为“可数可加性”。

基于以上列举之事实，证明康托集 X 是“有长度”的，并且 $L(X) = 0$ 。（提示: 考虑康托集的定义方式，并应用上述的四条事实）